«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

____________ О.А. Решетникова
«10» ноября 2023 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

____________ Д.В. Ливанов
«10» ноября 2023 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2024 года
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

подготовлен федеральным государственным бюджетным
научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Пояснения к демонстрационному варианту
контрольных измерительных материалов единого государственного
экзамена 2024 года по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) 2024 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2024 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2024 г., приведён в кодификаторе проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике.

В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности.

Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на некоторых позициях экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждой позиции будет предложено только одно задание.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2024 г.

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2024 года по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 | -0,8 | Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Угол BAC равен 32°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Площадь треугольника ABC равна 24; DE – средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

В ромбе $ABCD$ угол DBA равен 13°. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.

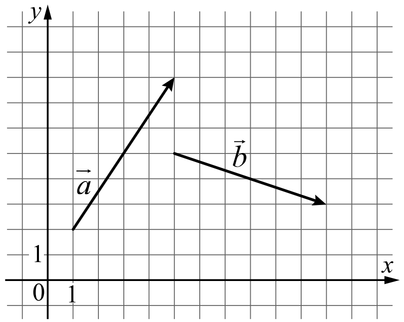
Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на бóльшую сторону параллелограмма.

Ответ: ___________________________.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



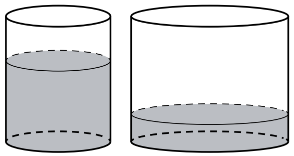
Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Даны векторы $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(-3;6)$ и $\vec{c}(4;-2)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Ответ: ___________________________.

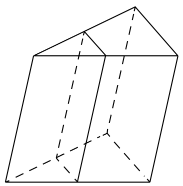
3 В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

ИЛИ

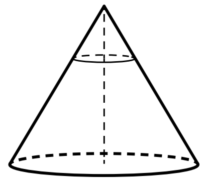
Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую её в отношении $1:2$, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию и делящая конус на две части. Каков объём той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объём всего конуса равен 54?



Ответ: ___________________________.

4 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более 2 лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?

Ответ: ___________________________.

5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?
Ответ: ___________________________.

ИЛИ

В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения $3^{x-5}=81$.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+49}=10$.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47)=3$.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Решите уравнение $\sqrt{2x+3}=x$. Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наименьший из них.

Ответ: ___________________________.

7 Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}6$ и $\pi<\alpha<2\pi$.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Найдите значение выражения $16\log_7\sqrt[4]{7}$.

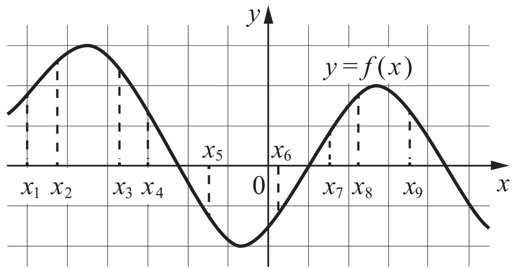
Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{5}}\cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, ... x_9.

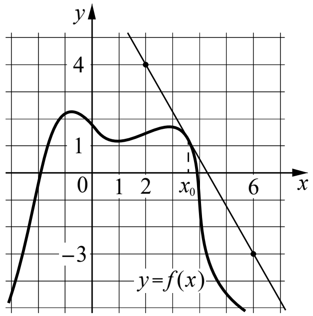


Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

9 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c\cdot\frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц), f – частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: ___________________________.

10 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Смешав 45%-ный и 97%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-ного раствора использовали для получения смеси?

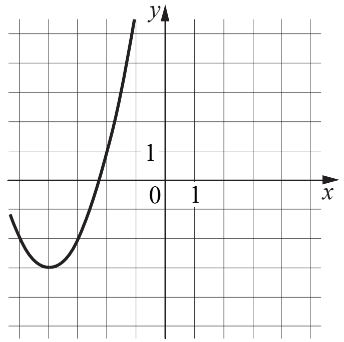
Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9x - 9\ln(x+11) + 7$$

на отрезке $[-10{,}5; 0]$.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 \cdot e^{3-x}$.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 256}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что $BD=CD$.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:3$. Найдите площадь сечения MNB.

15 Решите неравенство $\log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$.

16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на r% по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

17 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(|x|-5\right)^2+\left(y-4\right)^2=9,\\ \left(x+2\right)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Из пары натуральных чисел $(a;b)$, где $a>b$, за один ход получают пару $(a+b;a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару, большее число в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару $(806;788)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	**Правильный ответ**			
	Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
1	64	6	154	16
2	12	10		
3	4	12	52	
4	0,08	0,2		
5	0,6	0,1		
6	9	17	93	3
7	–0,96	4	16	
8	4	–1,75		
9	751			
10	5	15	7,5	
11	61			
12	–83	–6	16	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

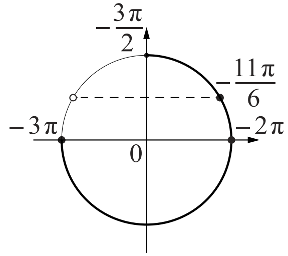
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$; $\sin x-2\sin^2 x=0$; $\sin x\cdot(2\sin x-1)=0$.

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

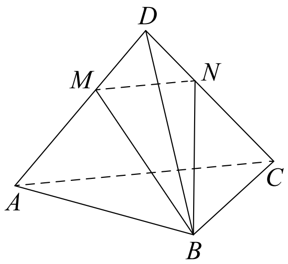
Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

14 В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что $BD = CD$.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB.

Решение. а) Прямоугольные треугольники ABD и ACD равны, поскольку катет AD общий, а $AB = AC$. Значит, $BD = CD$.



б) Найдём боковые рёбра. Треугольник BCD – равнобедренный и прямоугольный, поэтому $BD = CD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 5$. Аналогично, $AD = 5$. Найдём стороны треугольника MNB:

$$MB = NB = \sqrt{ND^2 + DB^2} = \sqrt{29},$$

$$MN = \sqrt{MD^2 + DN^2} = 2\sqrt{2}.$$

Площадь равнобедренного треугольника MNB равна

$$\frac{1}{2} \cdot MN \cdot \sqrt{MB^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

15 Решите неравенство $\log_{11}\left(8x^2 + 7\right) - \log_{11}\left(x^2 + x + 1\right) \ge \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2 + 7$ принимает положительные значения, при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1} \ge \frac{8x+35}{x+5};\quad \frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \ge \frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)};$$

$$\frac{3x^2+36x}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \le 0;\quad \frac{3x(x+12)}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \le 0,$$

откуда $x \le -12$; $-5 < x \le 0$. Учитывая ограничения $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$, получаем: $x \le -12$; $-\frac{35}{8} < x \le 0$.

Ответ: $(-\infty; -12]$; $\left(-\frac{35}{8}; 0\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

Решение. По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$800;\ 680;\ 560;\ 440;\ 320;\ 200;\ 160;\ 120;\ 80;\ 40;\ 0.$$

Пусть $k=1+\dfrac{r}{100}$. Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$800k;\ 680k;\ 560k;\ 440k;\ 320k;\ 200k;\ 160k;\ 120k;\ 80k;\ 40k.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$800k-680;\ 680k-560;\ 560k-440;\ 440k-320;\ 320k-200;$$
$$200k-160;\ 160k-120;\ 120k-80;\ 80k-40;\ 40k.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(560k-440)+5(120k-80)=3400k-2600.$$

Получаем: $3400k-2600=1480$, откуда $k=1{,}2$ и $r=20$.

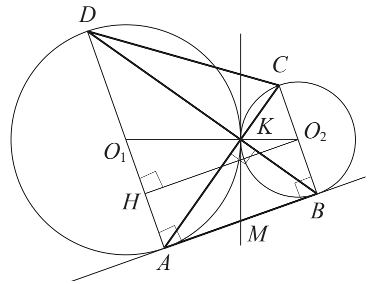
Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

17 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM=KM$ и $KM=BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный. Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD\perp AB$. Аналогично получаем, что $BC\perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC}=4$. Пусть $S_{BKC}=S$, тогда

$$S_{AKD}=16S.$$

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}}=\dfrac{DK}{KB}=\dfrac{AD}{BC}$, т.е. $S_{AKB}=4S$. Аналогично $S_{CKD}=4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H=\sqrt{O_1O_2^2-O_1H^2}=4.$$

Тогда

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB=20.$$

Следовательно, $25S=20$, откуда $S=0{,}8$ и $S_{AKB}=4S=3{,}2$.

Ответ: 3,2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

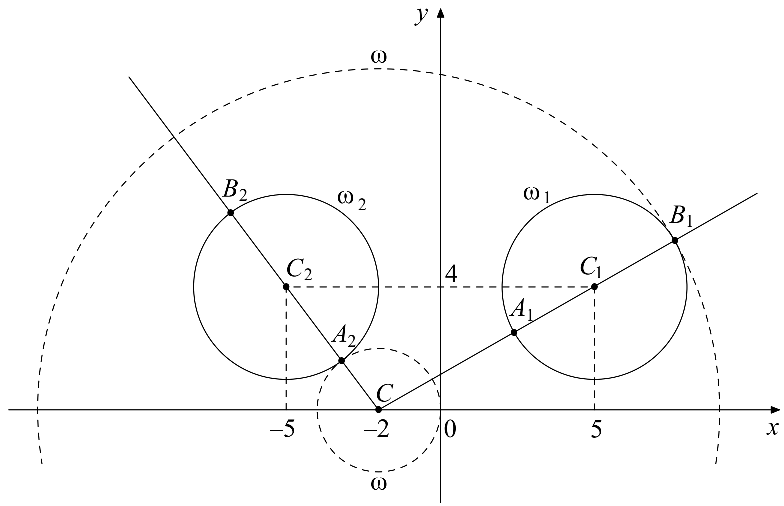
18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(|x|-5\right)^2+\left(y-4\right)^2=9,\\ \left(x+2\right)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x\ge 0$, то уравнение $\left(|x|-5\right)^2+\left(y-4\right)^2=9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5;\ 4)$ и радиусом 3, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5;\ 4)$ и таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2;\ 0)$ и радиусом a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65}$, то $CA_1=\sqrt{65}-3$, $CB_1=\sqrt{65}+3$.

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}=5$, то $CA_2=5-3=2$, $CB_2=5+3=8$.

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=2$ и $a=\sqrt{65}+3$.

Ответ: $2;\ \sqrt{65}+3$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 Из пары натуральных чисел $(a;b)$, где $a>b$, за один ход получают пару $(a+b;a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару, большее число в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару $(806;788)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$?

Решение. а) Из пары $(100;1)$ за один ход получается пара $(101;99)$, за два хода получается пара $(200;2)$, за три хода получается пара $(202;198)$, а за четыре хода получается пара $(400;4)$.

б) Заметим, что за один ход из пары $(a;b)$ получается пара $(a+b;a-b)$, а за два хода получается пара $(2a;2b)$. Следовательно, из пары $(100;1)$ можно получить только пары $\left(2^k\cdot 100;2^k\right)$ и $\left(2^k\cdot 101;2^k\cdot 99\right)$, где k – неотрицательное целое число. Число 806 не равно $2^k\cdot 100$ и $2^k\cdot 101$, а значит, пару $(806;788)$ невозможно получить за несколько ходов из пары $(100;1)$.

в) Заметим, что пару $(c;d)$ за один ход можно получить только из пары $\left(\frac{c+d}{2};\frac{c-d}{2}\right)$ при условии, что числа c и d одной чётности.

Таким образом, пара $(806;788)$ получается из пары $(797;9)$, которая получается из пары $(403;394)$. Пару $(403;394)$ невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 403 и 394 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число a в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$, равно 403.

Ответ: а) да; б) нет; в) 403.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <…>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором[1] <…>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <…>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленных двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

[1] Часть 14 статьи 59 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».